

Ключевые слова: коэффициент корреляции, прогностическая валидность, аномальный уровень, нормальный закон распределения, конкурсный балл, балл ВНО по математике.

Рис. 8. Лит. 11.

Інформація про автора

ШЕВЧУК Олександр Федорович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Вінницький національний аграрний університет (21008, м. Вінниця, вул. Сонячна, 3, e-mail: shevchuk177@gmail.com).

SHEVCHUK Oleksandr – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Vinnytsia National Agrarian University (21008, Vinnytsia, 3, Soniachna Str: e-mail: shevchuk177@gmail.com).

ШЕВЧУК Александр Федорович – кандидат физико-математических наук, доцент, Винницкий национальный аграрный университет (21008, г. Винница, ул. Солнечная, 3, e-mail: shevchuk177@gmail.com).



УДК 681.518.3

АНАЛІТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ МАТЕМАТИЧНОГО ТА ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СУПЕРПОЗИЦІЇ РІВНОМІРНОГО І ПУАССОНІВСЬКОГО ПОТОКІВ ТРАНЗАКЦІЙ ©

О.І. ПІДГУРСЬКИЙ,
кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри моделювання та
інформаційних технологій в економіці,
Вінницький національний
аграрний університет
(м. Вінниця)

У роботі створено та апробовано дві імітаційні моделі неоднорідного гібридного потоку транзакцій, що є результатом суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоків. Перша модель імітує процеси генерації двох незалежних потоків транзакцій (рівномірного і пуассонівського) з подальшою їх суперпозицією. Друга імітаційна модель створена із використанням математичної моделі суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоків транзакцій. На основі математичної моделі побудовано генератор псевдовипадкових чисел, що безпосередньо визначає інтервали часу між транзакціями гібридного потоку. Проведено аналітичні дослідження результатів експериментів з математичною та імітаційними моделями гібридного потоку та сформульовано висновки про адекватність цих моделей. Робота містить матеріали, що отримані у результаті розвитку попередніх досліджень автора.

© О.І. ПІДГУРСЬКИЙ, 2018

Ключові слова: потоки транзакцій, суперпозиція потоків, імітаційні моделі, математичні моделі, закони розподілу ймовірностей, адекватність моделей.

Табл. 9. Рис. 7. Літ. 14.

Постановка проблеми. У сучасній світовій економіці ефективне управління потоками матеріальних, людських, фінансових та інформаційних ресурсів викликає необхідність докладного дослідження потоків транзакцій у складних логістичних системах. Такі потоки є гібридними і структурно досить непростими, оскільки утворюються у результаті суперпозиції різнорідних за своїми характеристиками потоків.

Дослідження потоків транзакцій здійснюється за допомогою процедур їх математичного та імітаційного моделювання (комп'ютерної симуляції), що дозволяє отримувати найкращі варіанти створення мікрологістичних та макрологістичних систем.

Поєднання інструментів математичного та імітаційного моделювання надає широкі можливості дослідникам потоків транзакцій у логістичних системах, оскільки недоліки кожного з цих видів моделювання компенсуються перевагами іншого. Так математичне моделювання дозволяє оперативно і без великих витрат отримати у багатьох випадках досить точний результат. Але математичне моделювання гібридних потоків в логістичних системах пов'язане із рядом суттєвих обмежень та припущень щодо характеристик потоків, які входять до їх складу. А такі припущення та обмеження можуть досить сильно позначатися на точності та адекватності результатів математичного моделювання. Тому з метою подолання цих небажаних впливів інструменти математичного моделювання доцільно застосовувати у комплексі з технологіями імітаційного моделювання. І хоча комп'ютерна симуляція суперпозиції потоку із рівномірним розподілом інтервалів часу між транзакціями (надалі рівномірного потоку) та пуассонівського потоку вимагає більше ресурсів, вона дозволяє провести експерименти без вагомих обмежень та припущень щодо структури досліджуваних випадкових процесів.

Імітаційне моделювання потоків реалізується за допомогою ряду псевдовипадкових чисел, які продукуються комп'ютерними програмами (генераторами). Алгоритми роботи генераторів використовують математичні моделі потоків у вигляді функцій розподілу ймовірностей тривалості випадкових інтервалів часу між двома послідовними транзакціями. Таким чином, процедури комп'ютерної симуляції потоків транзакцій суттєво залежать від математичних моделей цих потоків.

Отже, для ґрунтовного дослідження суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків транзакцій необхідно провести порівняльний аналіз результатів їх математичного та імітаційного моделювання.

Математична модель гібридного потоку, який утворюється суперпозицією пуассонівського та рівномірного потоків транзакцій, була розроблена автором та представлена у роботі [1]. Ця розробка дає можливість побудувати програмний генератор псевдовипадкових чисел для імітаційної моделі, що дозволить провести комп'ютерну симуляцію гібридного потоку.

Крім того, з метою верифікації математичної та пов'язаної з нею імітаційної моделей доцільно побудувати ще одну імітаційну модель, яка описувала б процес роздільного утворення рівномірного та пуассонівського потоків транзакцій з наступною їх суперпозицією. У такий спосіб можна провести порівняльний аналіз

результатів математичного та імітаційного моделювання досліджуваних потоків. Результати цього аналізу дозволять сформулювати висновок про адекватність моделей та оцінити їх спроможність відтворювати стохастичні процеси у логістичних системах. До того ж, подібність значень досліджуваних показників, отриманих від усіх трьох моделей, дадуть підставу стверджувати про їх взаємну верифікацію.

Зважаючи на вище викладене, проблема аналітичних досліджень результатів імітаційного та математичного моделювання суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків транзакцій в логістичних системах є досить актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження стохастичних потоків подій проводили такі визнані вчені, як Буреннікова Н.В. [13], Гнеденко Б.В., Коваленко Н.Н. [2], Клейнрок Л. [3], Потапова Н.А. [14], Сааті Т.Л. [4], Тихонов В.І., Миронов М.А. [5], Хінчін О.Я. [6] та інші. У своїх дослідженнях вони ґрунтовно і комплексно проаналізували пуассонівський потік, для якого притаманні властивості стаціонарності, ординарності та відсутності післядії. Математична модель цього потоку стала класичною, що дозволяє активно використовувати її для аналізу стохастичних процесів функціонування різного роду складних систем. Заради застосування цієї загальновідомої і лапідарної моделі науковці в досліджуваних системах можуть нехтувати характерними особливостями потоків випадкових подій задля обґрунтування їх пуассонівської природи. Але такий підхід негативно позначається на якості результатів моделювання стохастичних систем. Тому сучасні вчені проводять ґрунтовні дослідження непуассонівських потоків випадкових подій, яким притаманні властивості нестаціонарності, обмеженої післядії, неоднорідності та гібридності.

Так, Маєвський О.В. у роботі [7] автор досліджує однорідні та нестаціонарні у часі потоки подій і стверджує, що коли інтенсивність залежить від множини параметрів, то формування несуперечливої оцінки нестаціонарних потоків є неможливою. Таку оцінку можна отримати тільки для тих інтервалів нестаціонарного потоку, де потік є стаціонарним.

У роботі [8] розроблено математичну модель вузла комп'ютерної мережі, на вхід якого надходить гібридний неоднорідний потік інформаційних повідомлень, що є результатом суперпозиції потоків різних інтенсивностей.

В роботі [9] були досліджені потоки неоднорідних подій, узагальнені моделі Пуассона з безмежною кількістю генераторів подій і визначаються обставини, за яких кожен такий генератор у свій унікальний спосіб здійснює вплив на загальний потік.

У роботі [10] дослідники, застосувавши інструменти комп'ютерної симуляції, розробили спосіб встановлення оптимальної кількості потоків інформаційних повідомлень між об'єктами аграрної інфраструктури. При формуванні потоків в імітаційній моделі автори застосували багатовимірний нормальний закон розподілу згідно центральної граничної теореми теорії ймовірностей.

Результати сучасних досліджень помітно збагатили колекцію моделей стохастичних потоків подій, що сприяє науковцям та розробникам складних логістичних систем у створенні нових та модернізації існуючих структур. Але можна звернути увагу й на те, що задачам моделювання гібридних потоків випадкових подій, які формуються шляхом суперпозиції потоку з довільним законом розподілу ймовірностей та пуассонівського потоку у сучасних розробках приділяється досить мало уваги.

Крім того, кожна щойно створена математична чи імітаційна модель мають пройти процедуру верифікації, що визначає ступінь їх відповідності процесам функціонування досліджуваних систем. У цьому контексті цікавими виглядають аналітичні дослідження результатів математичного та імітаційного моделювання

суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоку транзакцій. Схожість результатів математичної та імітаційних моделей має підтвердити їх спроможність адекватно описувати досліджувані процеси.

Тому проблема розробки математичних та імітаційних моделей гібридних потоків транзакцій у складних логістичних системах з подальшою верифікацією цих моделей є досить актуальною.

Формулювання цілей статті. Метою статті є проведення аналітичних досліджень результатів математичного та імітаційного моделювання суперпозиції рівномірного і пуассонівського потоків транзакцій.

У логістичній системі у результаті суперпозиції двох потоків формується гібридний потік транзакцій. Перший потік є рівномірним, де інтервали часу між транзакціями описуються рівномірним законом розподілу ймовірностей з параметрами a та b [11]. Другий потік є пуассонівським із параметром λ .

Необхідно розробити дві імітаційні моделі гібридного потоку та проаналізувати результати їх випробування у комплексі з результатами, отриманих від математичної моделі суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоків транзакцій, що була створена у роботі [1].

Перша імітаційна модель (надалі Модель 1) має описувати процес роздільного утворення рівномірного та пуассонівського потоків транзакцій із подальшою їх суперпозицією.

У другій імітаційній моделі (надалі Модель 2) генератор псевдовипадкових чисел для безпосереднього формування інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку має бути побудований на основі тієї ж математичної моделі суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоків транзакцій.

Експерименти з математичною та імітаційними моделями гібридних потоків мають закінчитись аналітичними дослідженнями отриманих результатів з метою перевірки адекватності моделей та проведення їх взаємної верифікації.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для проведення зазначених досліджень необхідно звернутись до результатів роботи [1], де автором розроблено математичну модель неоднорідного гібридного потоку транзакцій, що є результатом суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоку транзакцій. Основними складовими цієї моделі є:

1. Функція розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку $F_c(t)$:

$$F_c(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} + \frac{2\lambda t}{2 + \lambda(b+a)} e^{-\lambda t} + H(t-a) \frac{(2 - \lambda(t-a))(t-a)}{\lambda(b^2 - a^2) + 2(b-a)} e^{-\lambda t}, & 0 \leq t \leq b, \\ 1, & t > b \end{cases} \quad (1)$$

2. Функція щільності розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку $f_c(t)$:

$$f_c(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} + 2 \frac{1-\lambda t}{2+\lambda(b+a)} \lambda e^{-\lambda t} + H(t-a) \frac{(\lambda(t-a)-2)^2-2}{\lambda(b^2-a^2)+2(b-a)} e^{-\lambda t}, & 0 \leq t \leq b \\ 0, & 0 > t > b \end{cases} \quad (2)$$

3. Початкові моменти розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку $\bar{\alpha}_c$, $\bar{\alpha}_c^{(2)}$:

$$\bar{\alpha}_c = \frac{b+a}{2+\lambda(b+a)} \quad (3)$$

$$\bar{\alpha}_c^{(2)} = 2 \frac{2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + \lambda^2(b^2 - a^2) - 2\lambda(b-a)}{\lambda^4(b^2 - a^2) + 2\lambda^3(b-a)} \quad (4)$$

Величина дисперсії розраховується за відомим виразом [12]:

$$D_c = \bar{\alpha}_c^{(2)} - \bar{\alpha}_c^2 \quad (5)$$

Вирази (1)-(5) будуть необхідні для проведення аналітичних досліджень гібридного потоку та порівняння результатів його математичного та імітаційного моделювання.

Характеристику математичної моделі доповнимо сімейством графіків функції $f_c(t)$ (рисунк 1), яка розраховувалася при значенні параметрів $\lambda=1$ та $b=0,5$. Параметр a при цьому варіювався від 0 (Залежність 1) до 0,499999 (Залежність 6).

Слід зауважити, що за умови нескінченного наближення параметра a до параметра b рівномірний потік перетворюється на потік регулярний, що і демонструє Залежність 6. Цю обставину цікаво буде врахувати при формуванні плану експериментів з імітаційними моделями. Адже аналіз результатів імітаційного та математичного моделювання суперпозиції регулярного та пуассонівського потоків транзакцій здійснено автором у роботі [11].

Перейдемо тепер до аспектів комп'ютерної симуляції суперпозиції рівномірного і пуассонівського потоків транзакцій. Для цього скористаємося тими ж програмними засобами, що і в роботі [11], та дещо адаптованим планом експерименту. Імітаційні Модель 1 та Модель 2 були створені автором в середовищі відкритого 32-розрядного компілятора FreeBASIC, який розробники програмного забезпечення можуть використовувати без ліцензії.

У процесі комп'ютерної симуляції потоків у кожному експерименті з Моделлю 1 та Моделлю 2 продукувались по 50000 транзакцій. При цьому використовувалась деяка абстрактна одиниця часу, оскільки для даного дослідження конкретні часові одиниці жодним чином не впливають на якість результату.

Модель 1 та Модель 2 генерують інтервали часу між транзакціями та розраховують початкові моменти розподілу цієї випадкової величини [12].

З метою формування гістограм у моделях виконується також і групування транзакцій за частковими часовими інтервалами. Зі структури досліджуваного гібридного потоку випливає, що максимальна тривалість інтервалів часу між транзакціями нескінченно наближається до значення параметра b . Тому тривалість

часткових часових інтервалів для побудови гістограм розподілу транзакцій розраховується шляхом поділу значення параметра b на прийнятну кількість таких інтервалів n . При цьому кількість часткових інтервалів в експериментах з імітаційними моделями була прийнята $n=10$.

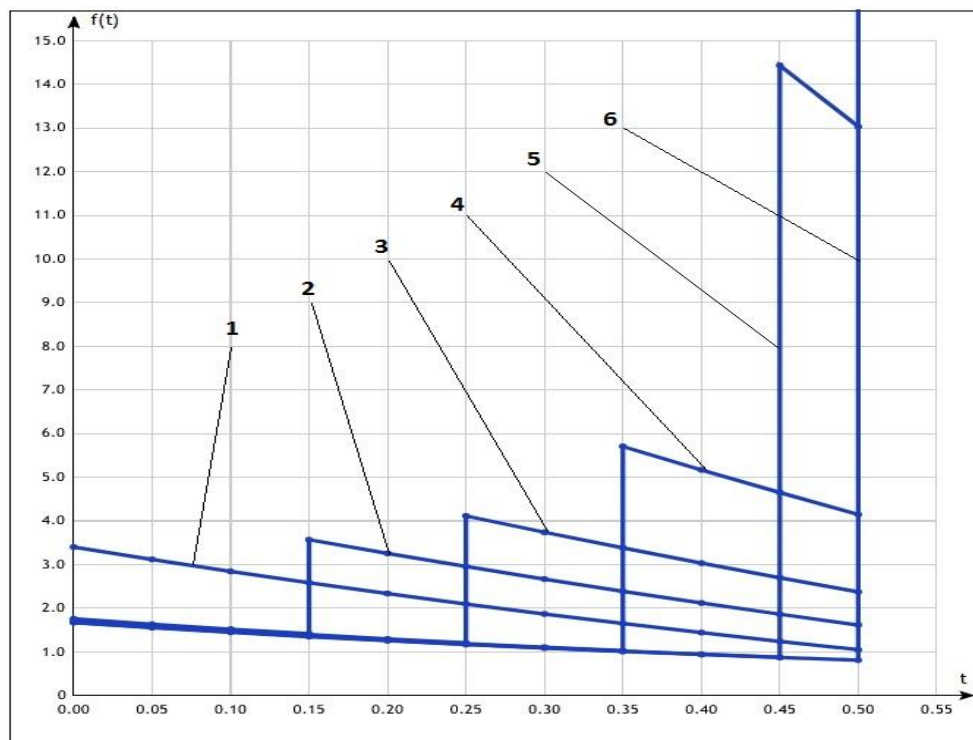


Рис. 1. Графік функції $f_c(t)$

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Модель 1 та Модель 2 випробовувались автором за різних комбінацій параметра a з параметрами b та λ . Для сумісності з результатами математичного моделювання спочатку було зафіксовано значення параметрів ($\lambda=1$ та $b=0,5$). Параметр a при цьому отримував такі значення: 1) $a=0$; 2) $a=0,15$; 3) $0,35$; 4) $0,499999$.

Такі ж самі значення параметрів були використані і у роботі [1], де автором аналізувались результати математичного моделювання суперпозиції пуассонівського та рівномірного потоків транзакцій. У такому випадку порівняння результатів імітаційного та математичного моделювання досліджуваного гібридного потоку буде цілком коректним.

Модель 1 та Модель 2 для усіх прийнятих комбінацій параметрів пройшли через 3 реалізації з подальшим узагальненням значень названих вище статистичних характеристик. Це було виконано з метою запобігання флуктуацій отриманих результатів комп'ютерної симуляції гібридного потоку.

На рис. 2 та рис. 3 показано фрагменти програмних кодів, що реалізують дієві частини алгоритмів функціонування імітаційної Моделі 1 та Моделі 2.

Збір, накопичення та обробка статистичних даних, отриманих в результаті експериментів з імітаційними моделями, проводилася за допомогою тих самих програмних модулів, що були розроблені автором у роботі [11].

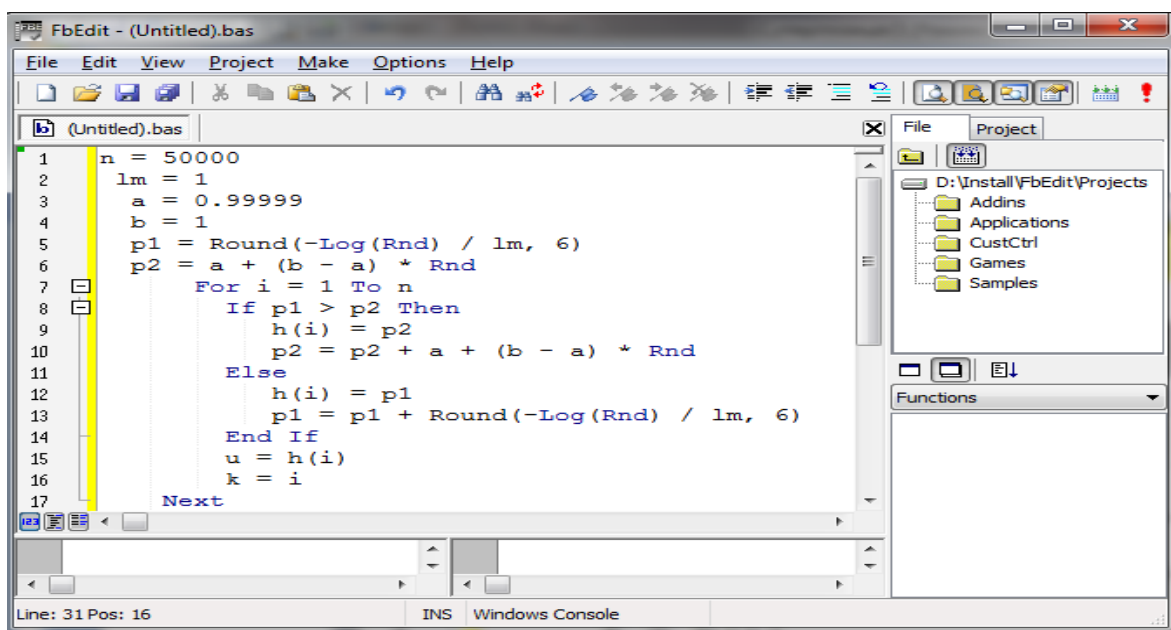


Рис. 2. Програмний код алгоритму функціонування Моделі 1
Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Обробка та аналіз статистичних даних потрібна для дослідження апостеріорних закономірностей, що притаманні величині тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку та порівняння цих закономірностей з апіорними, що визначені виразами (1)-(5) і проілюстровані на рис. 1. Для цього необхідно побудувати статистичні ряди розподілу транзакцій за частковими часовими інтервалами.

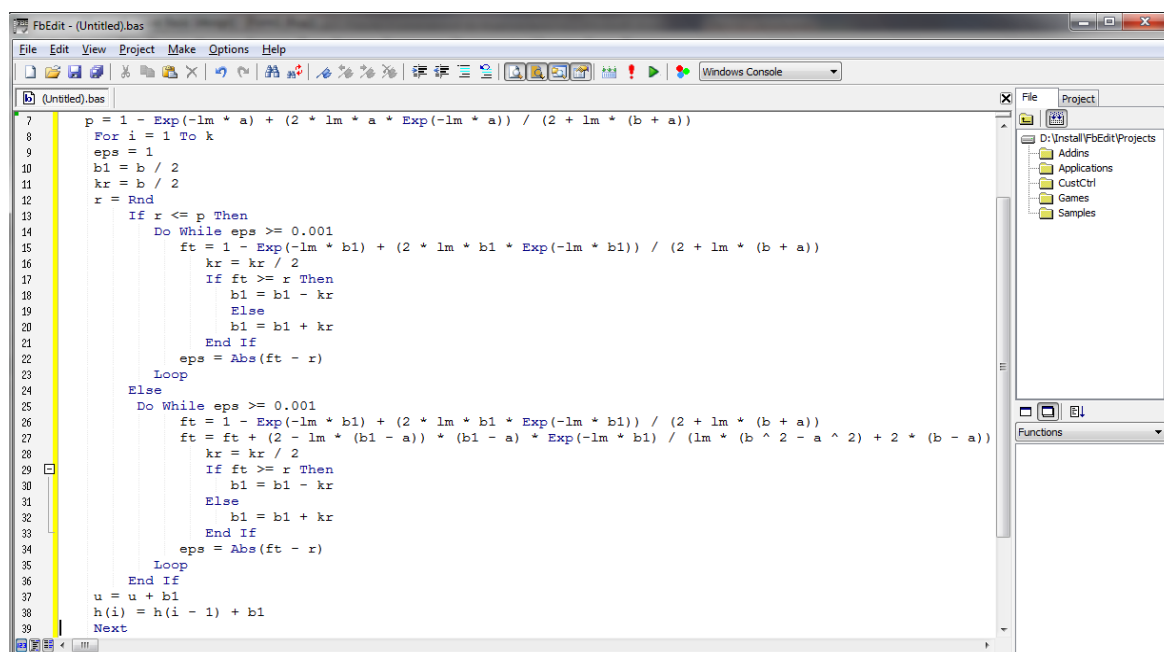


Рис. 3. Програмний код алгоритму функціонування Моделі 2
Джерело: сформовано автором на основі досліджень

У табл. 1 містяться узагальнені результати 3-х реалізацій експериментів з імітаційними Моделлю 1 та Моделлю 2 для значень параметрів $\lambda=1$; $b=0,5$ та першого граничного значення параметра a ($a=0$).

Таблиця 1

Групування транзакцій за частковими часовими інтервалами

Номер часткового інтервалу	Нижня межа інтервалу	Верхня межа інтервалу	Абсолютна кількість транзакцій в частковому інтервалі		Відносна кількість транзакцій в частковому інтервалі	
			Модель 1	Модель 2	Модель 1	Модель 2
1	0,00	0,05	7960	8100	0,1592	0,162
2	0,05	0,10	7243	7183	0,14486	0,14366
3	0,10	0,15	6526	6480	0,13052	0,1296
4	0,15	0,20	5751	5765	0,11502	0,1153
5	0,20	0,25	4943	4972	0,09886	0,09944
6	0,25	0,30	4513	4439	0,09026	0,08878
7	0,30	0,35	3957	3915	0,07914	0,0783
8	0,35	0,40	3533	3426	0,07066	0,06852
9	0,40	0,45	3008	3007	0,06016	0,06014
10	0,45	0,50	2566	2713	0,05132	0,05426

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Тут розміщені дані для побудови гістограми групування транзакцій за частковими часовими інтервалами. У колонках 6 та 7 знаходяться значення відносної кількості транзакцій у частковому часовому інтервалі, які були розраховані за допомогою операції ділення величин з колонок 4 та 5 на загальну кількість транзакцій гібридного потоку (50000). Відносна кількість транзакцій в деякому частковому часовому інтервалі визначає апостеріорну оцінку ймовірності того, що відстань у часі між транзакціями досліджуваного потоку буде входити до складу цього часткового інтервалу. Назвемо ці величини P_{1i}^* та P_{2i}^* відповідно.

Ймовірності ж належності проміжків часу між транзакціями до певних часткових інтервалів розраховуються апріорно за допомогою математичної моделі через функцію розподілу ймовірностей $F_c(t)$, яка визначена виразом (1). Ймовірність P_i того, що відтинок часу між транзакціями досліджуваного потоку буде належати до деякого часткового інтервалу визначається приростом функції розподілу ймовірностей $F_c(t)$ на цьому інтервалі [12].

Для визначення рівня подібності результатів комп'ютерної симуляції (P_{1i}^* , P_{2i}^*) та математичного моделювання (P_i) суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоків транзакцій розмістимо відповідні значення в табл. 2.

На рис. 4 значення табл. 2 подані у вигляді 3-х сумісних гістограм. Як видно з табл. 2 та рис. 4 значення величин P_{1i}^* , P_{2i}^* та P_i є досить подібними.

Таблиця 2

Апріорні та апостеріорні оцінки ймовірності розподілу транзакцій потоку за частковими часовими інтервалами ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0$)

Номер часткового інтервалу	Нижня межа інтервалу	Верхня межа інтервалу	Оцінка ймовірності P_{1i}^*	Оцінка ймовірності P_{2i}^*	Ймовірність P_i
1	0,00	0,05	0,15920	0,16200	0,16102
2	0,05	0,10	0,14486	0,14366	0,14407
3	0,10	0,15	0,13052	0,12960	0,12857
4	0,15	0,20	0,11502	0,11530	0,11441
5	0,20	0,25	0,09886	0,09944	0,10148
6	0,25	0,30	0,09026	0,08878	0,08969
7	0,30	0,35	0,07914	0,07830	0,07896
8	0,35	0,40	0,07066	0,06852	0,06920
9	0,40	0,45	0,06016	0,06014	0,06033
10	0,45	0,50	0,05132	0,05426	0,05229

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Взявши за базу порівняння величину ймовірності P_i , визначимо максимальне відносне відхилення значень P_{1i}^* , P_{2i}^* від базового. За результатами розрахунків визначено, що найбільше відхилення значень P_{1i}^* від P_i спостерігається у частковому інтервалі № 3 і становить 2,99%. Максимальне відносне відхилення значень P_{2i}^* від P_i зафіксоване у частковому інтервалі №2 у розмірі 2,43%. Максимальне відносне відхилення значень P_{1i}^* від P_{2i}^* виявлене у частковому інтервалі № 9 і складає 3,95%.

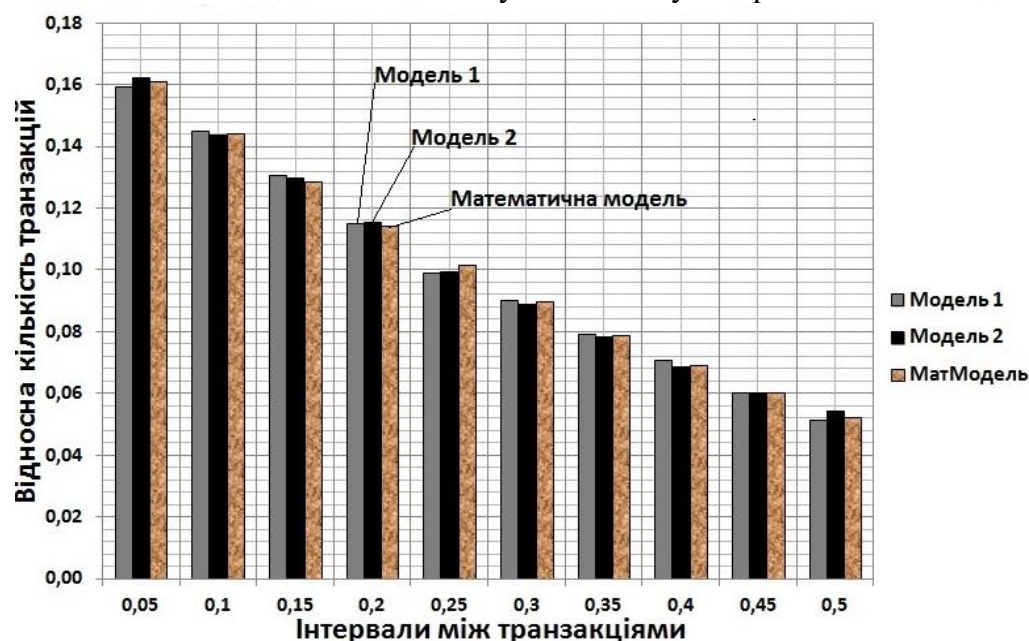


Рис. 4. Гістограми групування транзакцій за інтервалами ($\lambda=1$, $b=0,5$, $a=0$)

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Гістограми на рис. 4 демонструють, що тривалість інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку знаходиться в межах від 0 до 0,50 і висота стовпців гістограм монотонно спадає. Така монотонність є особливістю тоді, коли межі тривалості інтервалів гібридного потоку повністю відповідають параметрам рівномірного потоку транзакцій ($a=0$ та $b=0,5$).

Означені гістограми графічно ілюструють повну спорідненість зображених статистичних рядів розподілу і Залежності 1 на рисунку 1. Експерименти показали, що при збільшенні кількості часткових інтервалів (і відповідно зменшенні їх тривалості) спостерігається стійка тенденція поступового наближення гістограм на рис. 4 до залежності 1 на рис. 1.

Далі проаналізуємо числові характеристики інтервалів часу між транзакціями досліджуваного потоку. Модель 1 та Модель 2 можуть розраховувати апостеріорні оцінки математичного сподівання, дисперсії, середньоквадратичного відхилення та коефіцієнтів варіації, асиметрії, ексцесу.

Математична модель також дозволяє розраховувати апіорні значення зазначених величин. Проведемо розрахунки математичного сподівання та дисперсії, використавши вирази (3)-(5) для значень $\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0$:

$$\bar{\alpha}_c = \frac{b+a}{2+\lambda(b+a)} = 0,2 \quad (1)$$

$$D_c = \bar{\alpha}_c^{(2)} - \bar{\alpha}_c^2 \approx 0,0191019. \quad (2)$$

Апостеріорні та апіорні оцінки числових характеристик покажемо у таблиці 3. Наведені у табл. 3 оцінки числових характеристик від усіх трьох моделей практично тотожні. При попарному їх порівнянні максимальне відхилення значень не перевищує 1,02%.

Таблиця 3

Апостеріорні і апіорні оцінки числових характеристик інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0$)

Показник	Модель 1	Модель 2	Математична модель	Відхилення
Математичне сподівання	0,200042	0,199930	0,200000	0,06%
Дисперсія	0,019034	0,019230	0,019102	1,02%

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Тепер за аналогією проведемо аналіз результатів моделювання гібридного потоку, змінюючи параметр a . Так при $a=0,15$ апіорні та апостеріорні ймовірності групування транзакцій за частковими інтервалами будуть мати такі значення.

Таблиця 4

Апіорні та апостеріорні ймовірності розподілу транзакцій потоку за частковими часовими інтервалами ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0,15$)

Номер часткового інтервалу	Нижня межа інтервалу	Верхня межа інтервалу	Оцінка ймовірності P_{1i}^*	Оцінка ймовірності P_{2i}^*	Ймовірність P_i
1	2	3	4	5	6
1	0,00	0,05	0,08496	0,08600	0,08467

Продовження табл. 4

1	2	3	4	5	6
2	0,05	0,10	0,07758	0,07630	0,07879
3	0,10	0,15	0,07490	0,07560	0,07328
4	0,15	0,20	0,15252	0,15298	0,15419
5	0,20	0,25	0,13582	0,13870	0,13676
6	0,25	0,30	0,12450	0,11972	0,12088
7	0,30	0,35	0,10616	0,10406	0,10641
8	0,35	0,40	0,09194	0,09568	0,09326
9	0,40	0,45	0,08158	0,07992	0,08131
10	0,45	0,50	0,07004	0,07104	0,07047

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

На рис. 5 значення табл. 4 подано у вигляді 3-х сумісних гістограм.

У табл. 4 при порівнянні значень колонок 4 та 6 максимальне відхилення результатів не перевищує 3,0%, а колонок 5 та 6 – 3,2%. Якщо порівняти значення в колонках 4 та 5, то максимальне відхилення буде в межах 4,0%.

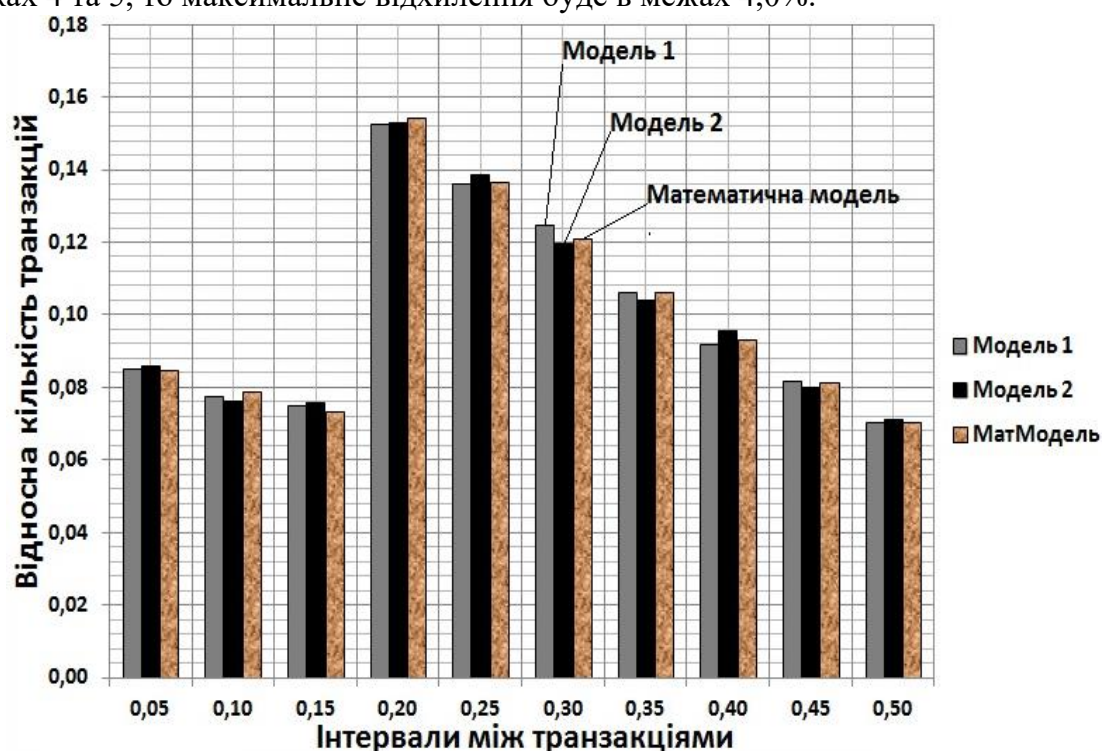


Рис. 5. Гістограми групування транзакцій за інтервалами ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0,15$)

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Гістограми на рис. 5 якісно відрізняються від гістограм на рис. 4. Тут монотонність у зменшенні висоти стовпців переривається різким її збільшенням у 4-му частковому інтервалі, де величина тривалості інтервалів між транзакціями стає більшою від значення параметра a ($a=0,15$). Ці гістограми відповідають Залежності 2 на рис. 1.

Таблиця апостеріорних та апіорних значень математичного сподівання та дисперсії проміжків часу між транзакціями гібридного потоку для даного експерименту буде мати такий вигляд.

Таблиця 5

Апостеріорні і апіорні оцінки числових характеристик інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0,15$)

Показник	Модель 1	Модель 2	Математична модель	Відхилення
Математичне сподівання	0,245265	0,245220	0,245283	0,01%
Дисперсія	0,017127	0,017175	0,017151	0,14%

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

У табл. 5 максимальне відхилення значень математичного сподівання спостерігається при порівнянні даних, отриманих від Моделі 2, з даними від математичної моделі і становить близько 0,03%. Максимальне відхилення значень дисперсії, виявлене при порівнянні даних від Моделі 1, з даними від Моделі 2 і не перевищує 0,28%.

Проведемо далі імітаційне та математичне моделювання гібридного потоку для значення параметра $a=0,35$ і розглянемо результати. Таблиця апостеріорних та апіорних ймовірностей розподілу транзакцій за частковими інтервалами тепер буде виглядати так.

Таблиця 6

Апіорні та апостеріорні ймовірності розподілу транзакцій потоку за частковими часовими інтервалами ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0,35$)

Номер часткового інтервалу	Нижня межа інтервалу	Верхня межа інтервалу	Оцінка ймовірності P_{li}^*	Оцінка ймовірності P_{2i}^*	Ймовірність P_i
1	0,0	0,1	0,08272	0,08370	0,08215
2	0,1	0,2	0,07494	0,07538	0,07651
3	0,2	0,3	0,07166	0,07138	0,07123
4	0,3	0,4	0,06734	0,06632	0,06629
5	0,4	0,5	0,06190	0,06168	0,06165
6	0,5	0,6	0,05624	0,05724	0,05731
7	0,6	0,7	0,05280	0,05496	0,05325
8	0,7	0,8	0,20324	0,19834	0,20233
9	0,8	0,9	0,17570	0,17460	0,17640
10	0,9	1,0	0,15346	0,15640	0,15288

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

При попарному порівнянні значень P_{li}^* , P_{2i}^* та P_i в кожному частковому інтервалі з'ясуємо, що максимальне відхилення між величинами не перевищує 4,0%.

На рис. 6 значення таблиці 6 подані у вигляді 3-х сумісних гістограм.

Гістограми на рис. 6 якісно є подібними до гістограм на рис. 5. Тут монотонність у зменшенні висоти стовпців також переривається різким її збільшенням. У даному випадку це спостерігається у 8-му частковому інтервалі, де величина тривалості інтервалів між транзакціями стає більшою від значення параметра a ($a=0,35$). Але тут перепад у висоті стовпців є помітно різкішим. Ці гістограми відповідають Залежності 4 на рис. 1.

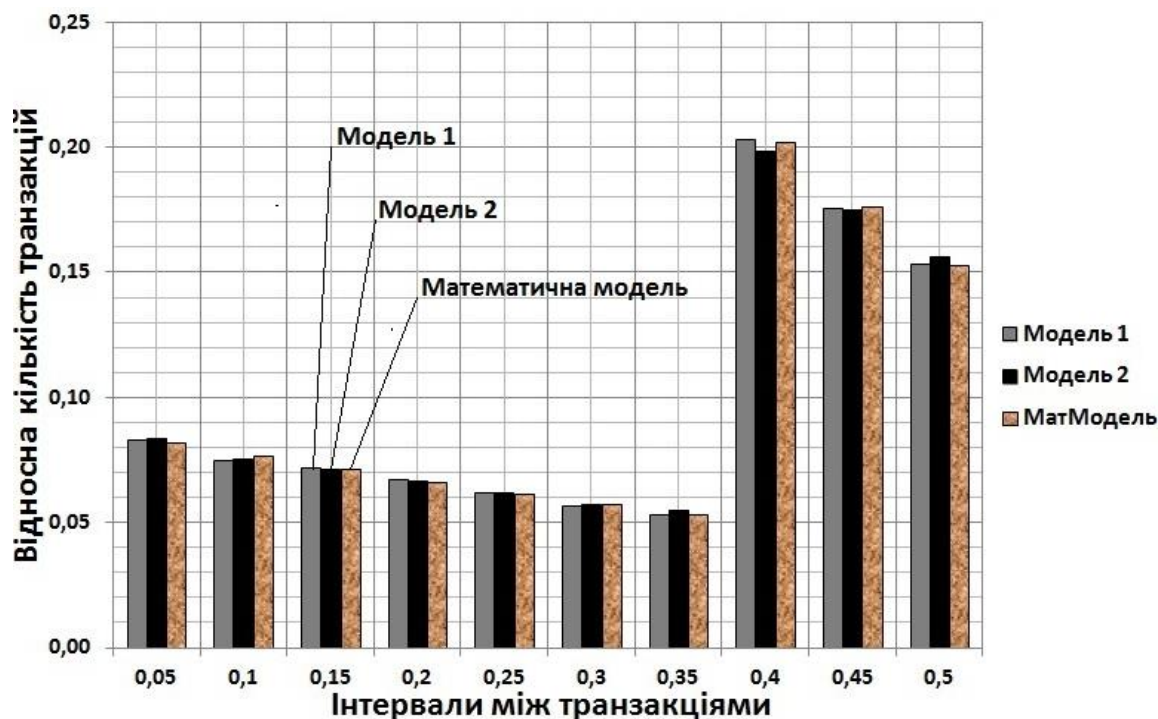


Рис. 6. Гістограми групування транзакцій за інтервалами ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0,35$)

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

У табл. 7 розміщені апостеріорні та апріорні значення математичного сподівання та дисперсії інтервалів між транзакціями досліджуваного потоку.

Таблиця 7

Апостеріорні і апріорні оцінки числових характеристик інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0,35$)

Показник	Модель 1	Модель 2	Математична модель	Відхилення
Математичне сподівання	0,298301	0,298228	0,298246	0,03%
Дисперсія	0,022471	0,022601	0,022464	0,61%

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Максимальне відхилення значень математичного сподівання у 0,03% виявлене при порівнянні результатів, отриманих від Моделі 1 та Моделі 2. Найбільше відхилення значень дисперсії, що знаходиться в межах 0,28%, знайдене при порівнянні даних від Моделі 2 та математичної моделі.

Розглянемо тепер результати моделювання гібридного потоку для другого граничного значення параметра a ($a \rightarrow b$). Як уже було зазначено вище, в такому випадку рівномірний потік має вироджуватись у потік регулярний. Тоді на виході маємо отримати гібридний потік у вигляді суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків. Результати проведених експериментів з моделями для значення параметрів $a=0,499999$ та $b=0,5$ повністю це підтверджують.

Табл. 8 містить значення апостеріорних та апріорних ймовірностей розподілу транзакцій за частковими інтервалами для наближеного до граничного значення параметра a .

Таблиця 8

Апріорні та апостеріорні ймовірності розподілу транзакцій потоку за частковими часовими інтервалами ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0,499999$)

Номер часткового інтервалу	Нижня межа інтервалу	Верхня межа інтервалу	Оцінка ймовірності P_{1i}^*	Оцінка ймовірності P_{2i}^*	Ймовірність P_i
1	0,0	0,1	0,08186	0,081980	0,080478
2	0,1	0,2	0,07458	0,073300	0,075007
3	0,2	0,3	0,06832	0,070420	0,069878
4	0,3	0,4	0,06524	0,064500	0,065071
5	0,4	0,5	0,06038	0,060580	0,060566
6	0,5	0,6	0,05732	0,056460	0,056346
7	0,6	0,7	0,05224	0,052500	0,052394
8	0,7	0,8	0,04716	0,049220	0,048693
9	0,8	0,9	0,04640	0,044620	0,045228
10	0,9	1,0	0,44650	0,446420	0,446340

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Попарне порівняння значень P_{1i}^* , P_{2i}^* , P_i для кожного часткового інтервалу показує, що максимальне відхилення між величинами є не вищим за 4,2%.

У табл. 9 показані апостеріорні та апріорні значення математичного сподівання та дисперсії інтервалів часу між транзакціями досліджуваного гібридного потоку.

Таблиця 9

Апостеріорні і апріорні оцінки числових характеристик інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку ($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0,499999$)

Показник	Модель 1	Модель 2	Математична модель	Відхилення
Математичне сподівання	0,333340	0,333231	0,333333111	0,04%
Дисперсія	0,030966	0,030997	0,030929702	0,22%

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Максимальне відхилення значень математичного сподівання, що не перевищує 0,04%, було виявлене при порівнянні результатів комп'ютерної симуляції гібридного потоку за допомогою Моделі 1 та Моделі 2. Значення дисперсії найбільше відрізняється у парі “Модель 2 – математична модель”. Тут максимальна розбіжність складає 0,22%.

Тепер порівняємо величини математичного сподівання та дисперсії, отримані від математичної моделі суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоків транзакцій (табл. 9), з відповідними величинами, які розрахуємо за допомогою математичної моделі суперпозиції регулярного та пуассонівського потоків транзакцій (при $\lambda=1$; $b=0,5$). У даній моделі математичне сподівання та дисперсія визначається такими виразами [11]:

$$\bar{\alpha}_t = \frac{b}{1 + \lambda b} = 0,333333333 \quad (3)$$

$$D_t = \frac{(\lambda b)^2 + 2\lambda b e^{-\lambda b} - 2(1 - e^{-\lambda b})}{[\lambda(1 + \lambda b)]^2} \approx 0,030929769. \quad (4)$$

Порівнявши дані з таблиці 9 та результати розрахунків значень a_t та D_t , можемо перекоонатись, що для математичного сподівання розбіжності починаються після шостого десяткового знаку, а для дисперсії – після сьомого.

На рисунку 7 значення таблиці 8 подані у вигляді 3-х сумісних гістограм.

Гістограми на рисунку 7 якісно є подібними до гістограм на рисунках 5 та 6, а також до гістограм, що побудовані в роботі [11] при дослідженні суперпозиції регулярного та пуассонівського потоків. Різке збільшення висоти стовпця в останньому частковому інтервалі свідчить про вагомий вплив на сумарний гібридний потік транзакцій потоку, що наближається до регулярного. Зовнішній вигляд гістограм на рисунку 7 у комплексі з розрахованими числовими характеристиками гібридного потоку повністю підтверджують тезу про те, що модель суперпозиції регулярного та пуассонівського потоків є лише окремим випадком моделі суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоків за умови граничного значення параметра a ($a \rightarrow b$). Ці гістограми відповідають Залежності 6 на рисунку 1.

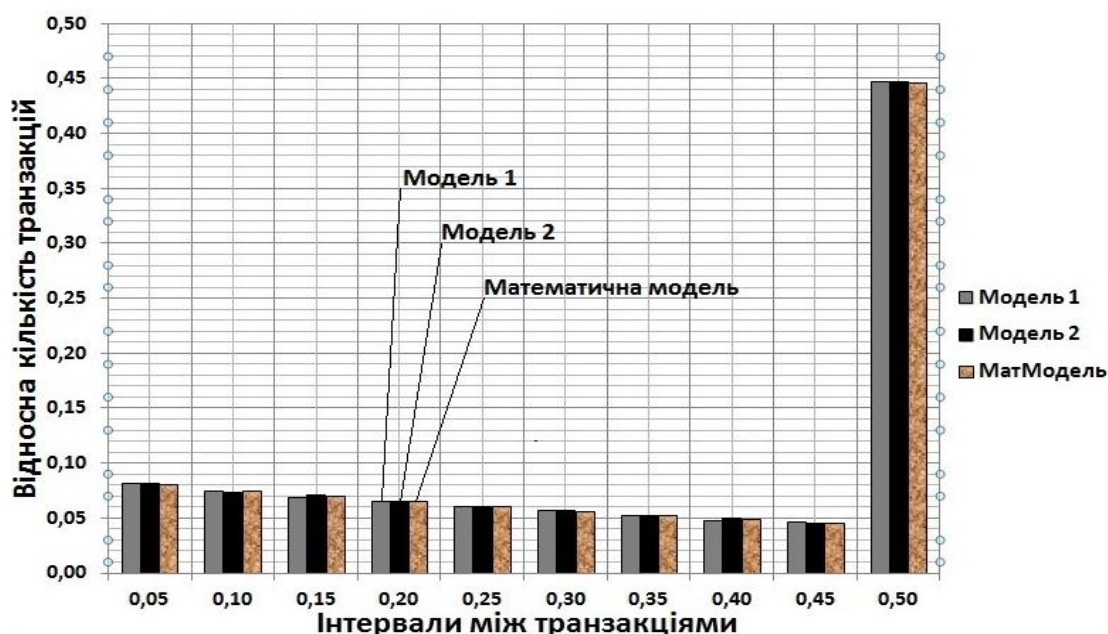


Рис. 7. Гістограми групування транзакцій за інтервалами
($\lambda=1$; $b=0,5$; $a=0,499999$)

Джерело: сформовано автором на основі досліджень

Результати експериментів з моделями гібридного потоку при різних значеннях параметра a засвідчили, що числові характеристики, отримані від математичної та імітаційних моделей, є практично тотожними. Попарне порівняння результатів від різних моделей показало, що максимальне відхилення в значеннях числових характеристик гібридного потоку знаходяться в межах 5%. Гістограми на рисунках 4-7 також демонструють узгодженість результатів від різних моделей, що є підтвердженням відображення кожною з моделей одного й того ж потоку.

Подібність результатів математичного та імітаційного моделювання можна пояснити логічно. Імітаційна Модель 2 має в своєму складі генератор псевдовипадкових чисел, що створений на базі математичної моделі гібридного

поток. Тому результати цих двох моделей за умови коректної побудови імітаційної Моделі 2 не повинні суттєво відрізнятися між собою.

Схожість результатів симуляції гібридного потоку за допомогою Моделі 1 та результатів математичного моделювання свідчить про коректність створення цих двох моделей гібридного потоку.

Висновки. Провівши аналітичні дослідження результатів математичного та імітаційного моделювання суперпозиції рівномірного та пуассонівського потоків у логістичній системі, можна сформулювати твердження про високий рівень їх подібності. Це твердження забезпечене математичними розрахунками, програмною реалізацією імітаційних моделей, обробкою та аналізом зібраних статистичних даних, а також відповідними графічними ілюстраціями. Аналіз результатів дослідження дозволяє позитивно оцінити придатність створених моделей адекватно описувати досліджуваний гібридний потік, оскільки ці моделі знаходяться у повній відповідності з фізичною природою даного потоку.

Запропоновані автором моделі дозволяють при комп'ютерній симуляції систем масового обслуговування з вхідним гібридним потоком транзакцій використовувати один генератор псевдовипадкових чисел замість двох, що є практичною цінністю проведеного дослідження. Створення імітаційних моделей з такими генераторами є метою майбутніх розробок.

Список використаних джерел

1. Підгурський О.І. Аналіз суперпозиції потоків транзакцій з пуассонівським та рівномірним законами розподілу / О.І. Підгурський // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики. – 2017. – №12. – С. 40-54.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко Н.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 2-е изд. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Пер с ан. А.И.Грушко / Под ред В.И.Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. 2-е изд. – М.: Советское радио, 1971. – 520 с.
5. Тихонов В.И., Миронов М. А. Марковские процессы. – М.: “Сов. Радио”, 1977. – 488 с.
6. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания // Тр. МИАН СССР. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – Т.49. – С. 3-122.
7. Маєвський О.В. Пуассонівські періодичні кусково стаціонарні потоки та оцінка їх інтенсивності / О.В. Маєвський, О.В. Мацюк, М.В. Приймак, О.М. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, 2016. – С. 87-99.
8. Пустовойтов П.Е. Одноканальная компьютерная сеть с неоднородным входным потоком заявок без приоритетов [Текст] / П.Е. Пустовойтов // Системы обработки информации. – Харків: ХУПС, 2011. – Вип. 4(94). – С. 205-207.
9. Сидорова О.И. Пуассоновская модель трафика с бесконечным числом неоднородных источников // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, 2015. – № 1. – С. 47-66.
10. Харченко В.В. Моделювання інформаційних потоків аграрного формування / В.В. Харченко, Ю.О. Нам'ясенко // Науковий вісник Міжнародного гуманітарного університету. Серія: Економіка і менеджмент. – 2017. – № 25. – Ч. 2 – С. 172-176.

11. Підгурський О.І. Порівняльний аналіз результатів імітаційного та математичного моделювання суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків транзакцій / О.І. Підгурський // Економіка. Фінанси. Менеджмент: актуальні питання науки і практики. – 2018. – № 3. – С. 47-60.

12. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 6-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1999. – 576 с.

13. Буреннікова Н. В. Управління розвитком: модель формування сучасної інформаційної системи / Н.В. Буреннікова, В.А. Фостолович // Бізнес-інформ. – 2017. – № 4. – С. 138-144

14. Потапова Н. А. Синергетичний розвиток складних економічних систем / Н.А. Потапова // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – 2012. – № 725. – С. 180-186.

Список джерел у транслітерації/References

1. Pidhurskyi O.I. (2017) Analiz superpozytsii potokiv tranzaktsii z puassonivskym ta rivnomirnym zakonamy rozpodilu [An analysis of the superposition of transaction flows with Poisson and uniform distribution laws] *Ekonomika. Finansy. Menedzhment: aktualni pytannia nauky i praktyky*. Vol. 12. Pp. 40-54 [in Ukrainian].

2. Gnedenko B.V. and Kovalenko N.N. (1987) Vvedeniye v teoriyu massovogo obsluzhivaniya [Introduction to Queuing Theory]. 2-e izd. – M.: Nauka. 336 p. [in Russian].

3. Kleynrok L. (1979) Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queuing Theory] M.: Mashinostroyeniye. 432 p. [in Russian].

4. Saati T.L. (1971) Elementy teorii massovogo obsluzhivaniya i eye prilozheniya. 2-e izd. [Elements of the theory of queuing and its applications. 2nd edition] M.: Sovetskoye radio. 520 p. [in Russian].

5. Tikhonov V.I., Mironov M.A. (1977) Markovskiye protsessy. [Markov processes.] M.: «Sov. radio». 488 p. [in Russian].

6. Khinchin A.Ya. (1955) Matematicheskiye metody teorii massovogo obsluzhivaniya [Mathematical methods of queuing theory] Tr. MIAN SSSR. – M.: Izd-vo AN SSSR. T.49. Pp. 3-122. [in Russian].

7. Maievskyi O.V., Matsiuk O.V., Pryimak M.V. and Pryimak O.M. (2016) Puassonivski periodychni kuskovo statsionarni potoky ta otsinka yikh intensyvnosti [Poisson periodic piecewise stationary flows and evaluation of their intensity] *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V.N.Karazina*. Pp. 87-99 [in Russian].

8. Pustovoytov P.E. (2011) Odnokanalnaya kompyuternaya set s neodnorodnym vkhodnym potokom zayavok bez prioritetov [Single-channel computer network with a heterogeneous input stream of applications without priorities]. *Sistemi obrobki informatsii*. Vol. 4 (94). Pp. 205-207. [in Russian].

9. Sidorova O.I. (2015) Puassonovskaya model trafika s beskonechnym chislom neodnorodnykh istochnikov [Poisson's model of traffic with an infinite number of inhomogeneous sources]. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika*. Vol 1. Pp. 47-66 [in Russian].

10. Kharchenko V.V. and Namiasenko Yu.O. (2017) Modeliuvannia informatsiinykh potokiv ahrarnoho formuvannia [Modeling information flows of agrarian formation] *Naukovyi visnyk Mizhnarodnoho humanitarnoho universytetu. Seriya: Ekonomika i menedzhment*. Vol 25. Ch. 2 Pp. 172-176 [in Ukrainian].

11. Pidhurskyi O.I. (2018) Porivnialnyi analiz rezultativ imitatsiinoho ta matematychnoho modeliuvannia superpozytsii puassonivskoho ta rehuliarnoho potokiv tranzaktsii [Comparative analysis of simulation and mathematical modeling of Poisson superposition and regular transaction flows] *Ekonomika. Finansy. Menedzhment: aktualni pytannia nauky i praktyky*. Vol. 3. Pp. 47-60 [in Ukrainian].

12. Venttsel E.S. (1999) Teoriya veroyatnostey: Ucheb. dlya vuzov. – 6-e izd. [Theory of Probability: Proc. for universities. - 6 th edition] M.: Vyssh. shk. 576 p. [in Russian].

13. Buriennikova N.V. and Fostolovych V.A. Fostolovych (2017) Upravlinnia rozvytkom: model formuvannya suchasnoi informatsiinoi systemy [Development management: a model for the formation of a modern information system]. *Biznes-inform.* Vol. 4. – Pp. 138 – 144 [in Ukrainian].

14. Potapova N.A. (2012) Synerhetychnyi rozvytok skladnykh ekonomichnykh system [Synergetic development of complex economic systems]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnikha".* Vol. 725. Pp. 180-186 [in Ukrainian].

ANNOTATION

ANALYTICAL STUDY OF THE RESULTS OF MATHEMATICAL AND SIMULATION MODELING OF A SUPERPOSITION OF UNIFORM AND POISSON FLOWS OF TRANSACTIONS

PIDHURSKYI Oleksandr,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Modelling
and Information Technologies in Economics,
Vinnitsia National Agrarian University
(Vinnitsia)

In the article the two simulation models of heterogeneous hybrid transaction flow that is the result of a superposition of uniform and Poisson flows have been created and tested. The first model simulates the generation process of two independent transaction streams (uniform and Poisson) and their subsequent superposition. The second simulation model is based on the superposition mathematical model of both uniform and Poisson transaction flows. On the basis of the mathematical model a random number generator has been built, which directly determines the time intervals between the transactions of the hybrid flow. The results of experiments for mathematical and simulation models of the hybrid stream have been analyzed as well as the adequacy of these models has been estimated. The current work is the continuation of the previous research of the author.

Keywords: transaction flows, superposition of flows, simulation models, mathematical models, probability distribution, adequacy of models.

Tabl. 9. Fig. 7. Lit. 14.

АННОТАЦИЯ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СУПЕРПОЗИЦИИ РАВНОМЕРНОГО И ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКОВ ТРАНЗАКЦИЙ

ПОДГУРСКИЙ Александр Игоревич,
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры моделирования и
информационных технологий в экономике,
Винницкий национальный аграрный университет
(г. Винница)

В работе созданы и апробированы две имитационные модели неоднородного гибридного потока транзакций, что является результатом суперпозиции равномерного и пуассоновского потоков. Первая модель имитирует процессы генерации двух независимых потоков транзакций (равномерного и пуассоновского) с последующей их суперпозицией. Вторая имитационная модель создана с использованием математической модели суперпозиции равномерного и пуассоновского потоков транзакций. На основе математической модели построен генератор псевдослучайных чисел, который непосредственно определяет интервалы времени между транзакциями гибридного потока. Проведены аналитические исследования результатов экспериментов с математической и имитационными моделями гибридного потока, а также сформулированы выводы об адекватности этих моделей.

Работа содержит материалы, полученные в результате развития предыдущих исследований автора.

Ключевые слова: потоки транзакций, суперпозиция потоков, имитационные модели, математические модели, законы распределения вероятностей, адекватность моделей.

Табл. 9. Рис. 7. Лит. 14.

Інформація про автора

ПІДГУРСЬКИЙ Олександр Ігорович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри моделювання та інформаційних технологій в економіці, Вінницький національний аграрний університет (e-mail paraplane@meta.ua).

PIDHURSKYI Oleksandr – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Modelling and Information Technologies in Economics, Vinnytsia National Agrarian University (e-mail paraplane@meta.ua).

ПОДГУРСКИЙ Александр Игоревич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры моделирования и информационных технологий в экономике, Винницкий национальный аграрный университет (e-mail paraplane@meta.ua).

